Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 24. Jg. (1933) S. 305—306

# Über Tragflügel kleinsten induzierten Widerstandes

**1. Problemstellung.** Für einen Tragflügel gegebenen Auftriebes erhält man *bei vorgeschriebener Spannweite* den geringsten induzierten Widerstand, wenn man den Auftrieb nach einer Halbellipse verteilt. Die Nebenbedingung, daß die Spannweite vorgeschrieben ist, ist dabei aber durchaus wesentlich, und es ist also die Behauptung durchaus unzulässig, daß die elliptische Auftriebsverteilung die beste schlechthin sei. Der induzierte Widerstand ist um so kleiner, je größer die Spannweite gemacht wird. Wenn in einem Sonderfall die Spannweite des Flugzeuges durch die Forderung begrenzt wird, daß das Flugzeug durch ein bestimmtes vorgegebenes Hallentor geschoben werden kann, so ist es am Platz, innerhalb der so vorgeschriebenen Spannweite den Auftrieb elliptisch zu verteilen. Wenn aber eine derartige Begrenzung nicht vorliegt, dann wird man sich nach anderen Gesichtspunkten richten müssen. Eine beliebige Vergrößerung der Spannweite verbietet sich durch das in diesem Fall allzu stark anwachsende Holmgewicht. Eine den flugtechnischen Belangen gerecht werdende Formulierung der Aufgabe wäre wohl die, daß nicht das dem Auftrieb gleiche Gesamtgewicht, sondern das Gewicht der nichttragenden Teile als vorgegeben anzusehen ist, und daß nun diejenige Gestaltung des Flügels gesucht wird, durch die der gesamte Flügelwiderstand (induzierter plus Profilwiderstand), in dem sich das Holmgewicht mit auswirkt, ein Minimum wird. Es wäre sehr schwierig, diese Aufgabe etwa als Variationsproblem zu formulieren.

Hier soll eine einfachere Aufgabe gestellt werden, diese aber exakt durchgeführt werden. Man kommt nämlich zu einer vernünftigen Begrenzung der Spannweite auch dadurch, daß man neben dem Gesamtauftrieb $A$ des Flügels das Trägheitsmoment $A\,r^2$ der Auftriebsverteilung vorschreibt. $r$ ist dann der „Trägheitsradius“ der Auftriebsverteilung. Auf das Trägheitsmoment der Auftriebsverteilung wird man geführt, wenn man das Holmgewicht an jeder Stelle proportional dem dort wirkenden Biegungsmoment $M$ setzt. Dies würde allerdings nur dann genau zutreffen, wenn der Holm überall dieselbe Trägerhöhe hätte und das Steggewicht gegenüber dem Gewicht der Flanschen zu vernachlässigen wäre. Immerhin bedeutet es schon eine Annäherung an das, was man eigentlich ausdrücken will, wenn man vorschreibt, daß bei dem Tragflügel

$$\int_{-b/2}^{+b/2} M\,dx$$



einen gewissen gegebenen Betrag nicht überschreiten soll. Das Doppelte dieses Integrals läßt sich nun durch zweimalige partielle Integration unmittelbar in das obenerwähnte Trägheitsmoment der Auftriebsverteilung umformen. Wenn man nämlich den Auftrieb mit Hilfe des Kutta-Joukowskischen Satzes durch die Formel

$$A = \varrho\, v \int \Gamma\, dx$$

ausdrückt, so ist für $x > 0$

$$M(x) = \varrho\, v \int_x^{b/2} \Gamma (x' - x)\, dx',$$

und es ist nun

$$\int_0^{b/2} M\,dx = [x\,M]_0^{+b/2} - \int_0^{b/2} x \frac{dM}{dx}\, dx'.$$

Dabei ist

$$\frac{dM}{dx} = -\varrho\, v \int_x^{b/2} \Gamma\, dx.$$

Der erste Ausdruck verschwindet hier. Die zweite partielle Integration liefert nun in einfacher Weise

$$\int_0^{b/2} M\,dx = \varrho\, v \int_0^{b/2} \frac{x^2}{2} \Gamma\, dx,$$

was unserer obigen Behauptung entspricht.

Unsere mathematische Aufgabe soll also lauten: Es ist

$$W_i = \varrho \int \Gamma\, w\, dx$$

zu einem Minimum zu machen unter den Nebenbedingungen

$$A = \varrho\, v \int \Gamma\, dx = \text{gegeben}$$

und

$$A\, r^2 = \varrho\, v \int \Gamma\, x^2\, dx = \text{gegeben}.$$

$w$ ist dabei die nach der Tragflügeltheorie zu der Zirkulationsverteilung $\Gamma$ gehörige Abwärtsgeschwindigkeit am Flügel. Offenbar wird durch die Vorschrift, daß der Trägheitsradius $r$ eine bestimmte Größe haben soll, auch eine Aussage über die Querausdehnung des Tragflügels gemacht, aber eine, die die *mittlere* Ausdehnung des Flügels erfaßt und die für die Ausgestaltung der Flügelspitze keine Bindung enthält. Tatsächlich ergibt diese Aufgabe auch ganz andere Auftriebsverteilungen als die elliptische.

**2. Durchführung.** Die Aufgabe zerfällt nun in zwei Teile, erstens ist das Variationsproblem zu lösen, das uns sagt, nach welchem Gesetz innerhalb der jeweils gewählten Spannweite der Auftrieb zu verteilen ist, und zweitens ein Minimumproblem, das in dem Fall, daß die Spannweite gänzlich frei gelassen wird, aus den gemäß dem Variationsproblem zulässigen Lösungen diejenige aussucht, die den überhaupt kleinsten Widerstand ergibt.

Das Variationsproblem läßt sich verhältnismäßig einfach lösen, wenn wir uns eines von A. Betz stammenden Gedankens bedienen, nämlich, daß es zulässig ist, die Variationen $\delta\Gamma$, statt am Flügel selbst, an einem weit nach hinten verschobenen Hilfsflügel anzubringen, dessen Rückwirkung nach vorn vernachlässigt werden kann, und der selbst unter der Abwärtsgeschwindigkeit $2w$ steht. Wenn die Zirkulation $\Gamma(x)$ die gesuchte Lösung darstellt, so muß eine Variation von $W_i$ durch das Hinzutreten von solchen Zusatzzirkulationen $\delta\Gamma$ verschwinden, die gleichzeitig den Nebenbedingungen genügen. Diese Nebenbedingungen lauten offenbar

$$\delta A = \varrho v \int \delta\Gamma \, dx = 0 \tag{1}$$

und

$$\delta(A r^2) = \varrho v \int \delta\Gamma x^2 \, dx = 0. \tag{2}$$

Es wird nun offenbar dann

$$\delta W_i = \varrho \int \delta\Gamma w \, dx = 0, \tag{3}$$

wenn

$$w = C_1 + C_2 x^2 \tag{4}$$

ist, denn dann wird durch die Nebenbedingungen (1) und (2) auch (3) erfüllt.

Die zu dem in Gl. (4) angegebenen Wert von $w$ gehörige Zirkulation ist aber durch alte Entwicklungen der Tragflügeltheorie bekannt[1].

Wenn man

$$\Gamma = (\Gamma_0 + \Gamma_2 \xi^2)\sqrt{1-\xi^2}$$

setzt, wobei $\xi$ eine Abkürzung für $x : \frac{b}{2}$ ist, so erhält man eine Formel für die Abwärtsgeschwindigkeit, die genau von der Art von Gl. (4) ist, und zwar ist

$$C_1 = \frac{1}{2b}\left(\Gamma_0 - \frac{1}{2}\Gamma_2\right)$$

und

$$C_2 = \frac{6\Gamma_2}{b^3}.$$

Das Variationsproblem ist hiermit erledigt, und es handelt sich jetzt weiter darum, die besten mit den Bedingungen der Aufgabe verträg-

[1] Tragflügeltheorie I. Mitt., wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“ (Anm. d. Schriftl.: Hier S. 322).



lichen Werte von $\Gamma_0$ und $\Gamma_2$ zu finden. Mit Rücksicht darauf, daß sich $\Gamma_2$ als negativ ergeben wird, führen wir

$$-\Gamma_2/\Gamma_0 = \mu$$

ein und erhalten damit

$$\Gamma = \Gamma_0(1 - \mu\xi^2)\sqrt{1-\xi^2} \tag{5}$$

und

$$w = \frac{\Gamma_0}{2b}\left(1 + \frac{\mu}{2} - 3\mu\xi^2\right) \tag{6}$$

Unsere Nebenbedingungen lauten jetzt

$$A = \frac{\pi}{4}\varrho b v \Gamma_0\left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \tag{7}$$

und

$$A r^2 = \frac{\pi}{64}\varrho b^3 v \Gamma_0\left(1 - \frac{\mu}{2}\right). \tag{8}$$

Durch Division ergibt sich daraus sofort

$$r^2 = \frac{1}{16} b^2 \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{1 - \frac{\mu}{4}}$$

oder

$$b = 4r\sqrt{\frac{1 - \frac{\mu}{4}}{1 - \frac{\mu}{2}}}. \tag{9}$$

Durch Einsetzen in Gl. (7) findet man hieraus

$$\Gamma_0 = \frac{A}{\pi \varrho v r}\sqrt{\frac{1 - \frac{\mu}{2}}{\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)^3}}. \tag{10}$$

Der induzierte Widerstand ergibt sich gemäß S. 32 der „Vier Abhandlungen“ zu

$$W_i = \frac{\pi \varrho \Gamma_0^2}{8}\left(1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4}\right).$$

Dies gibt unter Berücksichtigung von Gl. (10)

$$W_i = \frac{A^2}{8\pi \varrho v^2 r^2} \frac{\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\left(1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4}\right)}{\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)^3}. \tag{11}$$

Der Verlauf der hier auftretenden Funktion von $\mu$, die hier zur Abkürzung $f(\mu)$ genannt werden soll, ist aus der untenstehenden kleinen Zahlentafel zu ersehen, in der auch der Verlauf von $\frac{b}{4r}$ und der des

Faktors von $\Gamma_0$ angegeben ist. Man erkennt leicht, daß das Minimum von $f(\mu)$ bei $\mu = 1$ liegt, was auch durch Untersuchung des Differentialquotienten von $f(\mu)$ nachgewiesen werden konnte, der bei $\mu = 1$ exakt verschwindet. Allerdings hat die Funktion hier kein gewöhnliches

Zahlentafel 1

| $\mu$ | $\sqrt{\dfrac{1-\frac{\mu}{4}}{1-\frac{\mu}{2}}}$ | $\sqrt{\dfrac{1-\frac{\mu}{2}}{\left(1-\frac{\mu}{4}\right)^2}}$ | $\dfrac{\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\left(1-\frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{4}\right)^2}{\left(1-\frac{\mu}{4}\right)^2}$ |
|---|---|---|---|
| 0,00 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,25 | 1,0351 | 1,0305 | 0,9458 |
| 0,50 | 1,0801 | 1,0581 | 0,9096 |
| 0,75 | 1,1402 | 1,0795 | 0,8921 |
| 1,00 | 1,2247 | 1,0887 | 0,8889 |

Minimum, sondern einen Wendepunkt und senkt sich für die Werte $\mu > 1$ weiter ab. Hier verliert aber unsere Aufgabe ihren vernünftigen Sinn, da hier negative Auftriebe an den Flügelspitzen auftreten und infolgedessen auch negative Biegemomente, und natürlich den negativen Biegungsmomenten keine negativen Holmgewichte entsprechen, sondern wieder positive Holmgewichte. Man hätte also für den Fall des Vorzeichenwechsels von $M$ nicht das Integral über $M$ sondern das über dem Betrag von $M$ zu nehmen und damit werden die Grundlagen unserer ganzen Rechnung für diesen Fall hinfällig. Es stellt also der größte vernünftige Wert von $\mu$ gleichzeitig den Bestwert dar. Im übrigen sind gemäß der Zahlentafel auch die Werte von $\mu$, die beträchtlich unter 1 liegen, noch nicht viel schlechter. Die elliptische Auftriebsverteilung ist allerdings im Rahmen unserer Aufgabe schon merklich schlechter. In der Abbildung sind die Zirkulationsverteilungen gemäß Gl. (5) und die zugehörigen Abwärtsgeschwindigkeiten gemäß Gl. (6) aufgezeichnet, und zwar für einen gegebenen Wert des Trägheitsradius $r$ und gegebenes $\Gamma_0$. Die Kurven $a$ stellen dabei die elliptische Auftriebsverteilung ($\mu = 0$) dar, die Kurven $b$ und $c$ gehören zu $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = 1$. Die Abbildung zeigt, daß die in letzter Zeit bevorzugten

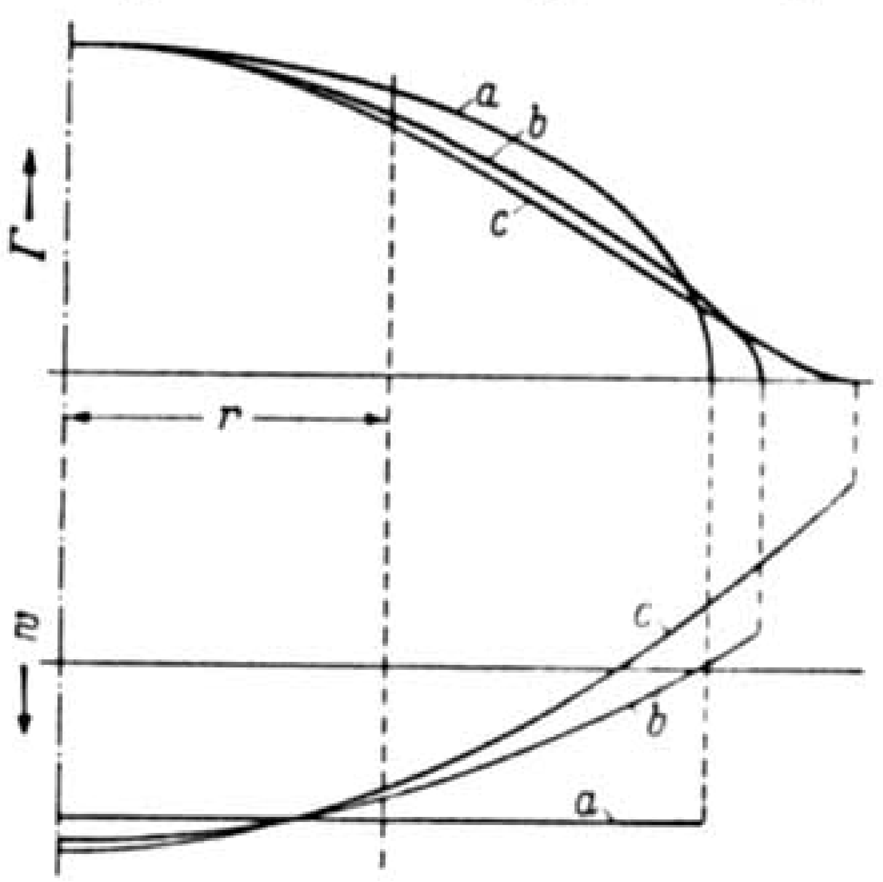


**Abb. 1. Verlauf der Zirkulation und der Abwärtsgeschwindigkeit**
$a$ Elliptische Verteilung; $b$ ein zwischenliegender Fall; $c$ beste Verteilung



spitzendigen Flügel von unserem Standpunkt aus den Vorzug verdienen vor denen mit annähernd rechteckigem Umriß, daß es dabei aber im einzelnen auf den Grad der Zuspitzung nicht allzusehr ankommt.

## Zusammenfassung

Es wird die Aufgabe gelöst, die Auftriebsverteilung zu finden, die für gegebenen Gesamtauftrieb und gegebenes Trägheitsmoment des Gesamtauftriebes den kleinsten induzierten Widerstand gibt. Diese Auftriebsverteilung ist nicht die elliptische, sondern entspricht mehr derjenigen der spitzendigen Flügel.